Université Paris Diderot 2013 - 2014

Dst°1

Question de cours – Énoncer le théorème du rang.

***Exercice* 1.** — 0n considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, -x + y + z, -x + 3y + z).$$

1. Justifier que
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
est la matrice de f dans la base canonique.
2. Donner une base de $Ker\,f$. En déduire la dimension de $Im\,f$.
3. f est-elle injective? surjective ? bijective ?
4. Donner un système d'équations et une base de $Im\,f$.
5. Montrer que $Ker\ f + Im\ f = \mathbb{R}^3$. A-t-on $Ker\ f \oplus Im\ f = \mathbb{R}^3$?
6. Trouver les réels a pour lesquels $rang(A - a\,I) \leq 2$.

***Exercice* 2.** — 0n considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, dont la matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 6 & -1 & -6 \\ -6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Donner $f(x, y, z)$.

   On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:
$$u_1 = (1, -2, 2), \quad u_2 = (-1, 1, -1), \quad u_3 = (-1, 0, -1)$$
2. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et justifier que la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
est la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.

T.S.V.P

3. Justifer que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer les coordonnées des vecteurs $e_1 + e_2 - e_3$ et $f(e_1 + e_2)$ dans la base B.

5. Donner la matrice D de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.

6. Montrer que

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Montrer que $D^n = P^{-1}A^nP$ et en déduire A^n.

***Exercice* 3. —** On considère la projection p de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sur la droite d'équation $x - y = 0$ et parallèlement à la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de la droite $x - y = 0$.

2. Quelle est la matrice B de p dans la base: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Donner la matrice A de p dans la base canonique.